

CAPÍTULO 9

TEORÍA DE LAS ECUACIONES

En este tema se va a estudiar de manera breve un poco de la teoría sobre la resolución de ecuaciones de grado superior a dos. Como se irá analizando sobre la marcha, está restringido el tema, pues solamente se refiere a ciertas ecuaciones y a ciertas soluciones, no a todas.

Para ello es necesario tener como antecedentes algunos teoremas y la división sintética.

1) **TEOREMA DEL RESIDUO:** Se utiliza para obtener de manera rápida el residuo de la división de un polinomio entre un binomio $(x - r)$, sin hacer la división.

TEOREMA DEL RESIDUO

Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera. Entonces el residuo que se obtiene de dividir $P(x)$ entre el binomio $(x - r)$ es $P(r)$.

Ejemplo 1: Encontrar el residuo que se obtiene al dividir $2x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 20x + 5$ entre $(x - 2)$.

Solución: En este caso, $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 20x + 5$ y $(x - r) = (x - 2)$, de donde se deduce que $r = 2$. Así que el residuo es

$$P(2) = 2(2)^4 - 5(2)^3 + 11(2)^2 - 20(2) + 5$$

$$P(2) = 1$$

El residuo es uno.

COMPROBACIÓN:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - x^2 + 9x - 2 \\
 x - 2 \overline{) 2x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 20x + 5} \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3} \\
 -x^3 + 11x^2 \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 9x^2 - 20x \\
 \underline{-9x^2 + 18x} \\
 -2x + 5 \\
 \underline{2x - 4} \\
 +1
 \end{array}$$

Ejemplo 2: Hallar el residuo que se obtiene al dividir $5x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 20x + 15$ entre $(x+3)$.

Solución: En este caso, $P(x) = 5x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 20x + 15$ y $(x-r) = (x+3)$, de donde se deduce que $r = -3$. Así que el residuo es

$$P(-3) = 5(-3)^4 + 6(-3)^3 - 10(-3)^2 + 20(-3) + 15$$

$$P(-3) = 108$$

El residuo es 108.

EJERCICIO 9.1

Encontrar el residuo que se obtiene de las siguientes divisiones, aplicando el teorema del residuo.

1) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 5x + 2) \div (x - 5)$

2) $(4x^5 - 8x^3 + 12x - 11) \div (x + 1)$

3) $(2x^4 - 12x^3 + x^2 + 21x - 34) \div (x - 6)$

4) $(6x^6 - 2x^3 - 17x^2 - 11) \div (x + 4)$

5) $(3x^4 + 2x^3 + 17x^2 - 55x - 21) \div (x - 9)$

6) $(2x^5 - 7x^3 - 11x + 31) \div (x + 9)$

7) $(7x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 29x - 44) \div (x - 10)$

8) $(x^6 + x^5 - 7x^3 - 7x^2 - 31) \div (x + 8)$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

2) TEOREMA DEL FACTOR Y SU RECÍPROCO

TEOREMA DEL FACTOR Y SU RECÍPROCO

Sea $P(x)$ un polinomio cualquiera. Si r es raíz de la ecuación racional entera $P(x) = 0$, entonces $(x - r)$ es factor de $P(x)$.

Se trata de un teorema cuya demostración o veracidad es muy directa y obvia. De hecho, su fundamentación es el equivalente al inverso de la solución de una ecuación por el método de factorización.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ por el método de factorización se siguen estos pasos:

- 1) $x^2 + 3x - 4 = 0$
- 2) Se factoriza: $(x - 1)(x + 4) = 0$
- 3) Se razona de la siguiente forma: Dos cantidades multiplicadas entre sí dan cero solamente que por lo menos una de ellas sea cero. Dos cantidades diferentes de cero multiplicadas entre sí nunca dan cero.

Lo anterior implica que si el factor $(x - 1)$ es igual a cero, la igualdad propuesta en la ecuación original $(x - 1)(x + 4) = 0$ es cierta, porque cero por lo que sea da cero. Por lo tanto el siguiente paso es igualar a cero dicho factor:

$$(x - 1) = 0$$

de donde

$$x_1 = 1$$

De igual forma, si el otro factor $(x + 4)$ es igual a cero, la igualdad propuesta en la ecuación original $(x - 1)(x + 4) = 0$ es cierta. Por lo tanto el siguiente paso es igualar a cero dicho factor:

$$x + 4 = 0$$

de donde

$$x_2 = -4$$

El proceso inverso sería:

- 1) Si $x_2 = -4$ es una raíz de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$, entonces
- 2) Se construye con esa raíz el factor $(x + 4)$, a partir de que si $x + 4 = 0$, la igualdad o ecuación original es igual a cero también.

Ejemplo 3: Demostrar que $(x + 1)$ es factor del polinomio $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.

Solución: Si $(x + 1)$ es factor del polinomio, implica que $x = -1$ es una raíz de la ecuación racional entera $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$; y si $x = -1$ es raíz de dicha ecuación, entonces el residuo de la división de $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ entre $(x + 1)$ debe ser cero, lo cual se puede probar con el teorema del residuo:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

$$P(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) + 2$$

$$P(-1) = -1 + 3 - 4 + 2$$

$$P(-1) = 0$$

Es decir, el residuo es cero y por lo tanto $(x + 1)$ es factor.

DIVISIÓN SINTÉTICA

Es un proceso mediante el cual se puede reducir considerablemente el trabajo realizado para encontrar el cociente y el residuo que resultan al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x - r)$.

Se deja como ejercicio de clase deducir los pasos de reducción del proceso hasta llegar a la regla misma de la división sintética, la cual es:

REGLA DE LA DIVISIÓN SINTÉTICA

Para dividir el polinomio $P(x)$ entre $(x - r)$:

- 1) Se escriben en el primer renglón los coeficientes de $P(x)$ en el mismo orden que las potencias decrecientes de x . Si falta una de éstas se escribe cero en el lugar que le corresponde.
- 2) Se sustituye el divisor $(x - r)$ por $+r$ y se escribe también en el primer renglón, a la derecha, separado por el símbolo $\mid$.
- 3) Se deja el segundo renglón por el momento en blanco.
- 4) Se escribe en la tercera línea (se baja) el coeficiente de la mayor potencia de x (el de la izquierda) y se multiplica por r . El producto obtenido se coloca en la segunda línea inmediatamente debajo del coeficiente de x que sigue en orden, se suma con éste y el resultado se escribe en la tercera línea. La suma obtenida se multiplica por r y el producto obtenido se coloca en la segunda línea debajo del coeficiente que sigue en orden y se suma con el mismo. Se continúa con el procedimiento hasta obtener un producto que se suma al término constante.
- 4) El último número de la tercera línea es el residuo y los otros, leídos de izquierda a derecha, son los coeficientes del cociente, cuyo grado es siempre menor en uno que el grado de $P(x)$.

Ejemplo 4: Obtener el cociente y el residuo, empleando la división sintética, de la división del polinomio $P(x) = 4x^3 + 2x^2 + 9x - 11$ entre $(x + 2)$.

Solución: En este caso, $r = -2$.

PASO 1: Se escriben en la primera línea los coeficientes del polinomio $P(x)$. A su derecha, en la misma línea y separado por $\mid$, se escribe el valor de $+r$. Se deja libre por el momento el segundo y el tercer renglones, separándolos con una línea, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{coeficientes de } P(x) & \longrightarrow & 4 + 2 + 9 - 11 \mid -2 \longleftarrow +r \\
 \text{segundo renglón (blanco)} & \longrightarrow & \\
 \text{línea de separación} & \longrightarrow & \hline
 \text{tercer renglón} & \longrightarrow &
 \end{array}$$

PASO 2: Se reproduce el primer coeficiente en el tercer renglón y abajo de él mismo:

$$\begin{array}{lcl}
 & & 4 + 2 + 9 - 11 \mid -2 \\
 & & \hline
 & & 4
 \end{array}$$

PASO 3: Se multiplica el coeficiente 4 escrito en el tercer renglón por (-2) (por r) y el producto se escribe en el segundo renglón, exactamente abajo del siguiente coeficiente del polinomio $P(x)$ y se suman:

$$\begin{array}{lcl}
 & & 4 + 2 + 9 - 11 \mid -2 \\
 & & - 8 \\
 & & \hline
 & & 4 \quad \uparrow \\
 & & \text{se suman}
 \end{array}$$

PASO 4: Se suman y el resultado se escribe abajo en el tercer renglón:

$$\begin{array}{lcl}
 & & 4 + 2 + 9 - 11 \mid -2 \\
 & & - 8 \\
 & & \hline
 & & 4 - 6
 \end{array}$$

PASO 5: Se multiplica el (-6) obtenido en el tercer renglón del paso anterior por (-2) (por r) y se repite todo el proceso hasta terminar con todos los coeficientes de $P(x)$:

$$\begin{array}{r}
 4 + 2 + 9 - 11 \mid -2 \\
 - 8 + 12 - 42 \\
 \hline
 4 - 6 + 21 - 53
 \end{array}$$

↑
↑
 coeficientes residuo
 del cociente

El último número de la derecha obtenido en el tercer renglón es el residuo de la división. Los otros números del tercer renglón, leídos de izquierda a derecha son los coeficientes del cociente, es decir, el cociente es $4x^2 - 6x + 21$ y el residuo es (-53) .

Ejemplo 5: Obtener el cociente y el residuo, empleando la división sintética, de la división del polinomio $5x^4 - 63x^2 + 8x - 11$ entre $(x - 4)$.

Solución: En este caso, $r = +4$.

Mecanizando el proceso, lo que se obtiene se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r}
 5 + 0 - 63 + 8 - 11 \mid 4 \\
 + 20 + 80 + 68 + 304 \\
 \hline
 5 + 20 + 17 + 76 + 293
 \end{array}$$

↑
↑
 coeficientes residuo
 del cociente

El cociente es: $5x^3 + 20x^2 + 17x + 76$

el residuo es: $+ 293$

EJERCICIO 9.2

Encontrar el cociente y el residuo que se obtiene de las siguientes divisiones, aplicando división sintética.

- 1) $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 5x + 2) \div (x - 5)$
- 2) $(4x^5 - 8x^3 + 12x - 11) \div (x + 1)$
- 3) $(2x^4 - 12x^3 + x^2 + 21x - 34) \div (x - 6)$
- 4) $(6x^6 - 2x^3 - 17x^2 - 11) \div (x + 4)$
- 5) $(3x^4 + 2x^3 + 17x^2 - 55x - 21) \div (x - 9)$
- 6) $(2x^5 - 7x^3 - 11x + 31) \div (x + 9)$
- 7) $(7x^4 - 10x^3 - 3x^2 + 29x - 44) \div (x - 10)$
- 8) $(x^6 + x^5 - 7x^3 - 7x^2 - 31) \div (x + 8)$

RAÍCES RACIONALES DE UNA ECUACIÓN RACIONAL ENTERA

El estudio de las ecuaciones al que se refiere este tema, como se dijo al inicio, está bastante restringido, ya que solamente se refiere a ciertas ecuaciones y a ciertas soluciones, no a todas. Una de las limitantes es que las soluciones que se pueden encontrar por el método que un poco más adelante se va a detallar solamente son racionales. El presente método no localiza raíces que sean números irracionales o complejos.

Para establecer los pasos a seguir en la localización de raíces en una ecuación polinomial, es necesario introducir dos conceptos.

Sea la ecuación polinomial $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, es decir, a_0 representa el coeficiente de la mayor potencia de x y a_n representa el coeficiente del término independiente. Entonces se tiene que:

1) **POSIBLES RAÍCES:** Las posibles raíces racionales de una ecuación racional entera o polinomial tienen como numerador a un factor de a_n y como denominador a un factor de a_0 .

Significa que si la ecuación tiene raíces racionales, serán algunas de las que se enlisten como posibles, ninguna otra.

Ejemplo 1: Enlistar las posibles raíces de la ecuación $2x^4 - 5x^3 - 13x^2 + x + 6 = 0$.

Solución: Factores del numerador: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6 (factores de 6).
Factores del denominador: ± 1 y ± 2 (factores de 2).

Las posibles raíces son todas las fracciones que se puedan obtener combinando todos los posibles numeradores con todos los posibles denominadores. Son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \quad (\text{con denominador } 1)$$

$$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} \quad (\text{con denominador } 2)$$

Nótese que en los que contienen denominador 2 no aparecen las combinaciones que tienen numerador 2 y 6, ya que equivalen a un entero y tres enteros respectivamente, que ya estaban enlistados.

Ejemplo 2: Enlistar las posibles raíces de la ecuación $6x^4 - 5x^3 - 13x^2 + x + 10 = 0$.

Solución: Factores del numerador: $\pm 1, \pm 2, \pm 5$ y ± 10 (factores de 10).
Factores del denominador: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6 (factores de 6).

Las posibles raíces son todas las fracciones que se puedan obtener combinando todos los posibles numeradores con todos los posibles denominadores. Son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10 \quad (\text{con denominador } 1)$$

$$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2} \quad (\text{con denominador } 2)$$

$$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3} \quad (\text{con denominador } 3)$$

$$\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6} \quad (\text{con denominador } 6)$$

Nótese que en los que contienen denominador 2 y denominador 6 no aparecen las combinaciones que tienen numerador 2 y 10, ya que equivalen a fracciones simplificadas que ya estaban enlistados.

2) ECUACIÓN DEGRADADA: La ecuación degradada es la que se obtiene de igualar a cero el cociente de la división del polinomio $P(x)$ entre $(x - r)$, donde r es una raíz encontrada.

Se emplea la ecuación degradada una vez obtenida una raíz, en virtud de que, por los teoremas del residuo y del factor, si r es raíz de la ecuación polinomial $P(x) = 0$, significa que $(x - r)$ es un factor del polinomio $P(x)$, o sea que el residuo de la división de $P(x) \div (x - r)$ es igual a cero.

En otras palabras, $P(x) = (x - r)Q(x)$, en donde $Q(x)$ es el cociente.

Si $P(x) = 0$, entonces es lo mismo que $(x - r)Q(x) = 0$. Y por el razonamiento del método de factorización de las ecuaciones, si dos cantidades multiplicadas dan cero, implica que por lo menos una de ellas sea cero. Así que se puede hacer $Q(x) = 0$ para que se cumpla la ecuación original.

Ejemplo 1: Hallar la ecuación degradada de la ecuación $5x^4 - 12x^3 + 8x^2 - 11x + 6 = 0$, suponiendo que previamente ya se obtuvo que $x = 2$ es una raíz.

Solución: Si $x = 2$ es una raíz eso implica que $(x - 2)$ es un factor de la ecuación original. Realizando la división de $(5x^4 - 12x^3 + 8x^2 - 11x + 6) \div (x - 2)$ por división sintética se obtiene que

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 5 & -12 & +8 & -11 & +6 & \\ & +10 & -4 & +8 & -6 & \\ \hline 5 & -2 & +4 & -3 & +0 & \end{array}$$

El cociente es $Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 3$. Como el residuo es cero, significa que

$$5x^4 - 12x^3 + 8x^2 - 11x + 6 = (x - 2)(5x^3 - 2x^2 + 4x - 3)$$

Como está igualada a cero, entonces la ecuación original puede escribirse también como

$$(x - 2)(5x^3 - 2x^2 + 4x - 3) = 0$$

De manera que por el razonamiento del método de factorización de las ecuaciones, si dos cosas multiplicadas dan cero implica que al menos una de ellas sea cero. Si el primer factor es igual a cero, es decir que $x - 2 = 0$, se obtiene la raíz propuesta desde el enunciado; pero también el segundo factor puede ser igual a cero y de allí salen las demás raíces.

Así que la ecuación degradada es

$$5x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = 0$$

PROCESO GENERAL

De manera muy general, sin manejar todavía algunos detalles, el proceso para localizar las raíces racionales de una ecuación polinomial es el mostrado en la siguiente página:

PASOS GENERALES PARA LOCALIZAR LAS RAÍCES RACIONALES DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL:

- 1) *Se enlistan todas las posibles raíces.*
- 2) *Se ensaya por división sintética una a una las posibles raíces hasta que el residuo sea cero. Por el teorema del residuo y del factor, ésta será una raíz.*
- 3) *Una vez localizada una raíz, se continúa ensayando con la ecuación degradada hasta localizar la siguiente raíz de la ecuación.*
- 4) *Se continúa así hasta llegar a una ecuación de segundo grado, la que se resuelve por la fórmula general.*
- 5) *Toda posible raíz que ya se haya verificado que no es raíz en la división sintética, tampoco lo será en la ecuación degradada; en cambio, cualquier raíz que ya haya salido, puede volver a serlo en la ecuación degradada.*

Ejemplo 1: Localizar las raíces racionales de la ecuación $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$.

Solución: Las posibles raíces son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \quad (\text{con denominador } 1)$$

$$\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} \quad (\text{con denominador } 2)$$

Se ensayan por división sintética una por una las posibles raíces hasta que el residuo sea igual a cero. Haciéndolo, por ejemplo, con $+1$:

$$\begin{array}{r}
 2 + 3 - 8 - 12 \quad | \quad 1 \\
 + 2 + 5 - 3 \\
 \hline
 2 + 5 - 3 - \underline{\underline{15}}
 \end{array}$$

residuo

←

Como el residuo es - 15 , es decir, no es igual a cero, significa que $x = 1$ no es raíz de la ecuación. Debe ensayarse con otra de las posibles raíces, por ejemplo con 2:

$$\begin{array}{r}
 2 + 3 - 8 - 12 \quad | \quad 2 \\
 + 4 + 14 + 12 \\
 \hline
 2 + 7 + 6 + \underline{\underline{0}}
 \end{array}$$

residuo

←

Como el residuo es cero significa que $x = 2$ es una raíz de la ecuación y además $(x - 2)$ es un factor de $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$. El otro factor es el cociente obtenido en la división, es decir,

$$2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = (x - 2)(2x^2 + 7x + 6) = 0$$

por lo que se puede afirmar que $2x^2 + 7x + 6 = 0$ (es igual a cero). Esta es la ecuación degradada y a partir de este momento con ella se seguirá trabajando. Pero como ya es una ecuación de segundo grado, ya se puede utilizar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(2)(6)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4}$$

$$x = \frac{-7 \pm 1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-3}{2}$$

$$x_3 = -2$$

Las tres raíces son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -\frac{3}{2} \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Nótese que las tres raíces pertenecen al enlistado inicial que se hizo de las posibles raíces.

Ejemplo 2: Localizar las raíces racionales de la ecuación $6x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 4x + 12 = 0$.

Solución: Las posibles raíces son

$$\begin{aligned} &\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 && \text{(con denominador 1)} \\ &\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} && \text{(con denominador 2)} \\ &\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3} && \text{(con denominador 3)} \\ &\pm \frac{1}{6} && \text{(con denominador 6)} \end{aligned}$$

Se ensayan por división sintética una por una las posibles raíces hasta que el residuo sea igual a cero. Haciéndolo, por ejemplo, con $+1$:

$$\begin{array}{r|l} 6 & -5 & -39 & -4 & +12 & 1 \\ & +6 & +1 & -38 & -42 & \\ \hline 6 & +1 & -38 & -42 & -30 & \end{array}$$

residuo

Como el residuo es -30 , es decir, no es igual a cero, significa que $x = 1$ no es raíz de la ecuación. Debe ensayarse con otra de las posibles raíces, por ejemplo con 3 :

$$\begin{array}{r}
 6 - 5 - 39 - 4 + 12 \quad | \quad 3 \\
 + 18 + 39 + 0 - 12 \\
 \hline
 6 + 13 + 0 - 4 + \underline{\underline{0}}
 \end{array}$$

residuo



Como el residuo es cero significa que $x = 3$ es una raíz y además que $(x - 3)$ es un factor del polinomio $6x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 4x + 12$. El otro factor es el cociente obtenido en la división, el cual es $6x^3 + 13x^2 - 4$. Es decir,

$$6x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 4x + 12 = (x - 3)(6x^3 + 13x^2 - 4) = 0$$

por lo que se puede afirmar que el factor $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$ (es igual a cero). Esta es la ecuación degradada y a partir de este momento con ella se seguirá trabajando.

Se vuelven a realizar ensayos por división sintética, en donde hay que considerar que $x = 1$ ya no puede ser raíz porque no lo fue anteriormente, en cambio, $x = 3$ sí puede volver a serlo. Por lo tanto conviene volver a ensayar con $x = 3$ para ver si vuelve a salir o, en caso contrario, ya descartarla del proceso.

$$\begin{array}{r}
 6 + 13 + 0 - 4 \quad | \quad 3 \\
 + 18 + 93 + 279 \\
 \hline
 6 + 31 + 93 + \underline{\underline{275}}
 \end{array}$$

residuo



Ya no fue raíz. Ensayando ahora, por ejemplo, con -1 :

$$\begin{array}{r}
 6 + 13 + 0 - 4 \quad | \quad -1 \\
 - 6 - 7 + 7 \\
 \hline
 6 + 7 - 7 + \underline{\underline{3}}
 \end{array}$$

residuo



Como el residuo es $+3$, es decir, no es igual a cero, significa que $x = -1$ no es raíz de la ecuación. Debe seguirse ensayando con otra de las posibles raíces, por ejemplo con -2 :

$$\begin{array}{r}
 6 + 13 + 0 - 4 \quad | -2 \\
 - 12 - 2 + 4 \\
 \hline
 6 + 1 - 2 + \underline{\underline{0}}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{residuo} \\
 \leftarrow
 \end{array}$$

Como el residuo es cero significa que $x = -2$ es una raíz y además $(x + 2)$ es un factor del polinomio $6x^3 + 13x^2 - 4$. El otro factor es el cociente, el cual es $6x^2 + x - 2$. Es decir,

$$6x^3 + 13x^2 - 4 = (x + 2)(6x^2 + x - 2) = 0$$

por lo que se puede afirmar que $6x^2 + x - 2 = 0$ (es igual a cero). Esta es la ecuación degradada y a partir de este momento con ella se seguirá trabajando. Pero como ya es una ecuación de segundo grado, ya se puede utilizar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12}$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

$$x_3 = -\frac{2}{3}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}$$

Las cuatro raíces son:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 \\x_2 &= -2 \\x_3 &= -\frac{2}{3} \\x_4 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Localizar las raíces racionales de la ecuación $9x^4 - 30x^3 + 13x^2 + 20x + 4 = 0$.

Solución: Las posibles raíces son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4 \quad (\text{con denominador } 1)$$

$$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3} \quad (\text{con denominador } 3)$$

$$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9} \quad (\text{con denominador } 9)$$

Se ensayan por división sintética una por una las posibles raíces hasta que el residuo sea igual a cero. Haciéndolo, por ejemplo, con $+2$:

$$\begin{array}{r|l} 9 & -30 & +13 & +20 & +4 & \\ & +18 & -24 & -22 & -4 & \\ \hline 9 & -12 & -11 & -2 & +0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{residuo} \\ \leftarrow \end{array}$$

Como el residuo es cero significa que $x = 2$ es una raíz y además $(x - 2)$ es un factor del polinomio $9x^4 - 30x^3 + 13x^2 + 20x + 4$. El otro factor es el cociente, el cual es $9x^3 - 12x^2 - 11x - 2$. Es decir,

$$9x^4 - 30x^3 + 13x^2 + 20x + 4 = (x - 2)(9x^3 - 12x^2 - 11x - 2) = 0$$

por lo que se puede afirmar que $9x^3 - 12x^2 - 11x - 2 = 0$ (es igual a cero). Esta es la ecuación degradada y recordar que a partir de este momento con ella se seguirá trabajando. Se

vuelven a realizar ensayos por división sintética, en donde hay que considerar que $x = 2$ sí puede volver a ser raíz. Ensayando entonces de nuevo con 2 :

$$\begin{array}{r}
 9 - 12 - 11 - 2 \quad | \quad 2 \\
 + 18 + 12 + 2 \\
 \hline
 9 + 6 + 1 + \underline{\underline{0}}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{residuo} \\
 \leftarrow
 \end{array}$$

Como el residuo es cero significa que $x = 2$ es una raíz y que además $(x - 2)$ es un factor del polinomio $9x^3 - 12x^2 - 11x - 2$. El otro factor es el cociente $9x^2 + 6x + 1$. Es decir,

$$9x^3 - 12x^2 - 11x - 2 = (x - 2)(9x^2 + 6x + 1) = 0$$

por lo que se puede afirmar que $9x^2 + 6x + 1 = 0$ (es igual a cero). Esta es la ecuación de-gradada y a partir de este momento con ella se seguirá trabajando. Pero como ya es una ecuación de segundo grado, ya se puede utilizar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(9)(1)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18}$$

$$x = \frac{-6 \pm 0}{18}$$

$$x_3 = \frac{-6 + 0}{18}$$

$$x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$x_4 = \frac{-6 - 0}{18}$$

$$x_4 = -\frac{1}{3}$$

Las cuatro raíces son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -\frac{1}{3} \\ x_4 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Nótese que se trata de un caso de raíces repetidas.

Ejemplo 4: Localizar las raíces racionales de la ecuación $9x^3 - 24x^2 + 14x - 4 = 0$.

Solución: Las posibles raíces son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4 \quad (\text{con denominador } 1)$$

$$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3} \quad (\text{con denominador } 3)$$

$$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{4}{9} \quad (\text{con denominador } 9)$$

Se ensayan por división sintética una por una las posibles raíces hasta que el residuo sea igual a cero. Haciéndolo, por ejemplo, con $+2$:

$$\begin{array}{r|l} 9 & -24 & +14 & -4 & | & 2 \\ & +18 & -12 & +4 & & \\ \hline 9 & -6 & +2 & +0 & & \end{array}$$

residuo

←

Como el residuo es cero significa que $x = 2$ es una raíz y que $(x - 2)$ es un factor del polinomio $9x^3 - 24x^2 + 14x - 4$. El otro factor es el cociente, el cual es $9x^2 - 6x + 2$. Es decir,

$$9x^3 - 24x^2 + 14x - 4 = (x - 2)(9x^2 - 6x + 2)$$

por lo que se puede afirmar que $9x^2 - 6x + 2 = 0$ (es igual a cero). Esta es la ecuación degradada y a partir de este momento con ella se seguirá trabajando. Pero como ya es una ecuación de segundo grado, ya se puede utilizar la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(9)(2)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{18}$$

Como la raíz cuadrada es negativa, las raíces de la ecuación serán complejas. De manera que por lo visto en el tema de números complejos, se tiene que:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36} \sqrt{-1}}{18}$$

$$x = \frac{6 \pm 6i}{18}$$

$$x = \frac{6(1 \pm i)}{18}$$

$$x = \frac{1 \pm i}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3}i$$

$$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

Por lo tanto, las tres raíces son:

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\x_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \\x_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\end{aligned}$$

Nótese que la primera raíz pertenece al enlistado inicial que se hizo de las posibles raíces, las otras dos no, ya que son complejas y realmente no se obtuvieron por este método, sino por la fórmula general. Conviene recordar que este método de raíces racionales solamente proporciona soluciones en el campo de los números racionales, pero no complejas.

COTAS

Como se puede ver, el trabajo de calcular las raíces racionales de una ecuación polinomial puede llegar a ser bastante laborioso. Con la intención de reducir un poco ese trabajo, algunos Matemáticos se han dado a la tarea de investigar la manera de cercar lo más posible las raíces, que no es otra cosa que tratar de eliminar de la lista de posibles raíces las más que se puedan que no lo sean, para evitar cálculos inútiles. Las *cotas* son eso.

Encontrar *cotas* es definir un rango de valores entre los cuales estén todas las raíces reales de una ecuación polinomial, de tal manera que toda posible raíz que quede afuera de ese rango, automáticamente queda eliminada. La *cota superior* es el valor arriba del cual ya no hay ninguna raíz. La *cota inferior* es el valor abajo del cual ya no hay ninguna raíz.

Existen varios métodos para encontrar cotas sin que tengan que coincidir necesariamente los valores hallados por un método con los del otro. En los ejemplos resueltos se aclarará esta situación.

MÉTODO DE LA RAÍZ

Sea la ecuación polinomial $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ con $a_0 > 0$. En caso de que el primer coeficiente a_0 no sea positivo, sino negativo, como se trata de una igualdad (está

igualada a cero), basta multiplicar en ambos lados por (-1) aunque del lado derecho vuelva a dar cero. Y sean

k = Diferencia entre el grado n de la ecuación y el exponente de la máxima potencia de x que tenga coeficiente negativo.

G = Máximo valor absoluto de los coeficientes negativos de la ecuación $f(x)$.

U = Cota superior.

L = Cota inferior.

Entonces una cota superior U es

$$U = 1 + \sqrt[k]{\frac{G}{a_0}}$$

La cota inferior se obtiene repitiendo el proceso anterior con la ecuación $f(-x) = 0$, en la que también debe cumplirse que $a_0 > 0$. Si U' es ahora la cota superior de $f(-x) = 0$, entonces la cota inferior de $f(x) = 0$ es $L = -U'$.

Ejemplo 1: Hallar las cotas por el método de la raíz para la ecuación $x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$.

Solución: En este caso se tienen:

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80$$

$$a_0 = 1 \quad (\text{primer coeficiente})$$

$$n = 4 \quad (\text{grado del polinomio})$$

$$k = 4 - 3 = 1 \quad (\text{diferencia del grado del polinomio menos el exponente 3 que es el que pertenece al del primer término negativo que aparece})$$

$$G = 80 \quad (\text{los coeficientes negativos que aparecen son: } -14, -14 \text{ y } -80. \text{ El de mayor valor absoluto es } 80)$$

sustituyendo en la fórmula para la cota superior

$$U = 1 + \sqrt[k]{\frac{G}{a_0}}$$

$$U = 1 + \sqrt[1]{\frac{80}{1}}$$

$$U = 1 + 80$$

$$U = 81$$

Significa que ningún valor mayor a 81 será raíz de la ecuación original.

Para obtener la cota inferior, se construye la ecuación $f(-x) = 0$, que no es otra cosa que sustituir la x por $(-x)$ en la ecuación original. Haciéndolo:

$$f(-x) = (-x)^4 - 14(-x)^3 + 51(-x)^2 - 14(-x) - 80 = 0$$

$$f(-x) = x^4 + 14x^3 + 51x^2 + 14x - 80 = 0$$

y repitiendo el procedimiento de cota superior con $f(-x) = 0$, ahora con los valores

$a_0 = 1$	(primer coeficiente)
$n = 4$	(grado del polinomio)
$k = 4 - 0 = 4$	(diferencia del grado del polinomio menos el exponente 0 que es el que pertenece al del primer término negativo que aparece)
$G = 80$	(los coeficientes negativos que aparecen son: -80. El de mayor valor absoluto solamente puede ser 80)

sustituyendo en la fórmula

$$U' = 1 + \sqrt[k]{\frac{G}{a_0}}$$

$$U' = 1 + \sqrt[4]{\frac{80}{1}}$$

$$U' = 1 + 2.99069$$

$$U' = 3.99069$$

De modo que la cota inferior para $f(x) = 0$, o sea para la ecuación original, es

$$L = -3.99069$$

Significa que ningún valor menor a (-3.99069) será raíz de la ecuación original.

Por lo tanto, las raíces racionales de la ecuación original $x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$ están todas en el intervalo $-3.99069 < \text{raíz} < 81$.

MÉTODO DE LAS FRACCIONES

Se construyen todas las fracciones posibles que tengan por numerador respectivamente el valor absoluto de cada coeficiente negativo de $f(x) = 0$ y por denominador la suma de todos los coeficientes positivos que lo preceden. Agréguese 1 a la mayor fracción así obtenida y ésta será cota superior U .

La cota inferior se obtiene repitiendo el proceso anterior del método de la raíz con la ecuación $f(-x) = 0$, donde también debe cumplirse que $a_0 > 0$. Si U' es la cota superior de $f(-x) = 0$, entonces la cota inferior de $f(x) = 0$, o sea de la ecuación original, es $L = -U'$.

A veces, pero no siempre, coinciden las cotas obtenidas por un método con las del otro. Cuando no coinciden deben seleccionarse las mejores cotas.

Ejemplo 2: Hallar las cotas para la ecuación $x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$ por el método de las fracciones.

Solución: Las fracciones que se pueden construir tomando como numerador cada coeficiente negativo (en valor absoluto) y como denominador la suma de los coeficientes positivos que le anteceden (que están antes), son

$$\frac{14}{1}, \frac{14}{1+51}, \frac{80}{1+51}$$

La mayor fracción así obtenida es $\frac{14}{1}$.

Entonces una cota superior es dicha fracción más uno, es decir

$$U = 1 + 14 = 15$$

$$U = 15$$

Significa que ningún valor mayor a 15 será raíz de la ecuación original.

Para obtener la cota inferior, se construye la ecuación $f(-x) = 0$, que no es otra cosa que sustituir la x por $(-x)$ en la ecuación original. Haciéndolo:

$$f(-x) = (-x)^4 - 14(-x)^3 + 51(-x)^2 - 14(-x) - 80 = 0$$

$$f(-x) = x^4 + 14x^3 + 51x^2 + 14x - 80 = 0$$

y repitiendo el proceso de cota superior ahora con $f(-x) = 0$, se construyen ahora las fracciones

$$\frac{80}{1 + 14 + 51 + 14} = \frac{80}{80} \quad (\text{la única posible})$$

La mayor fracción así obtenida es $\frac{80}{80}$. Entonces una cota superior para $f(-x) = 0$ es dicha fracción más uno, es decir

$$U' = 1 + 1 = 2$$

De modo que la cota inferior para $f(x) = 0$, o sea la ecuación original, es

$$L = -2$$

Significa que ningún valor menor a (-2) será raíz de la ecuación original.

Por lo tanto, las raíces racionales de la ecuación original $x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$ están todas en el intervalo $-2 < \text{raíz} < 15$.

Como los ejemplos 1 y 2 se refieren a la misma ecuación $x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$, las cotas obtenidas por el método de la raíz y el método de las fracciones se pueden comparar y seleccionar las mejores:

MÉTODO DE LA RAÍZ	MÉTODO DE LAS FRACCIONES
$U_r = 81$	$U_f = 15$
$L_r = -3.99069$	$L_f = -2$

Las mejores cotas son

$$U = 15$$

$$L = -2$$

lo que significa que todas las raíces reales de la ecuación $x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$ están entre (-2) y 15 .

$$-2 < \text{raíces reales} < 15$$

Ejemplo 3: Hallar las mejores cotas para la ecuación $2x^5 + x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 34x - 8 = 0$.

Solución: Haciéndolo por el método de la raíz:

En este caso se tiene:

$$f(x) = 2x^5 + x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 34x - 8$$

$$a_0 = 2 \quad (\text{primer coeficiente})$$

$$n = 5 \quad (\text{grado del polinomio})$$

$$k = 5 - 3 = 2 \quad (n \text{ menos el exponente del primer término negativo})$$

$$G = 34 \quad (\text{mayor coeficiente negativo en valor absoluto})$$

sustituyendo en la fórmula

$$U = 1 + \sqrt[k]{\frac{G}{a_0}}$$

$$U = 1 + \sqrt[2]{\frac{34}{2}}$$

$$U = 1 + 4.123$$

$$U = 5.123$$

Para obtener la cota inferior, se construye la ecuación $f(-x) = 0$, que no es otra cosa que sustituir la x por $(-x)$ en la ecuación original. Haciéndolo:

$$f(-x) = 2(-x)^5 + (-x)^4 - 11(-x)^3 + 25(-x)^2 - 34(-x) - 8 = 0$$

$$f(-x) = -2x^5 + x^4 + 11x^3 + 25x^2 + 34x - 8 = 0$$

Como es necesario que $a_0 > 0$ o sea positivo, basta multiplicar por (-1) toda la ecuación, o lo que es lo mismo, cambiarle de signo, aplicando la ley uniforme o de las igualdades. Haciéndolo resulta:

$$2x^5 - x^4 - 11x^3 - 25x^2 - 34x + 8 = 0$$

y repitiendo el procedimiento de cota superior para $f(-x) = 0$, o sea con la ecuación última anterior, ahora con

$$a_0 = 2 \quad (\text{primer coeficiente})$$

$$n = 5 \quad (\text{grado del polinomio})$$

$$k = 5 - 4 = 1 \quad (n \text{ menos el exponente del primer término negativo})$$

$$G = 34 \quad (\text{mayor coeficiente negativo en valor absoluto})$$

sustituyendo en la fórmula

$$U = 1 + \sqrt[k]{\frac{G}{a_0}}$$

$$U = 1 + \sqrt[1]{\frac{34}{2}}$$

$$U = 1 + 17$$

$$U = 18$$

De modo que la cota inferior para $f(x) = 0$, o sea para la ecuación original, es

$$L = -18$$

Haciéndolo ahora por el método de las fracciones. Las fracciones que se pueden construir tomando como numerador cada coeficiente negativo (en valor absoluto) y como denominador la suma de los coeficientes positivos que le anteceden, son

$$\frac{11}{2+1}, \frac{34}{2+1+25}, \frac{8}{2+1+25}$$

La mayor fracción así obtenida es $\frac{11}{3} = 3.666666$.

Una cota superior es dicha fracción más uno, es decir

$$U = 1 + 3.666$$

$$U = 4.666$$

Para obtener la cota inferior, se construye la ecuación $f(-x) = 0$, que no es otra cosa que sustituir la x por $(-x)$ en la ecuación original. Haciéndolo:

$$f(-x) = 2(-x)^5 + (-x)^4 - 11(-x)^3 + 25(-x)^2 - 34(-x) - 8 = 0$$

$$f(-x) = -2x^5 + x^4 + 11x^3 + 25x^2 + 34x - 8 = 0$$

Como es necesario que $a_0 > 0$ o sea positivo, basta multiplicar por (-1) toda la ecuación, o lo que es lo mismo, cambiarle de signo, aplicando la ley uniforme o de las igualdades. Haciéndolo resulta:

$$2x^5 - x^4 - 11x^3 - 25x^2 - 34x + 8 = 0$$

y repitiendo el procedimiento de cota superior, se construyen ahora las fracciones

$$\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{25}{2}, \frac{34}{2}$$

La mayor fracción así obtenida es $\frac{34}{2} = 17$.

Entonces una cota superior para $f(-x) = 0$ es dicha fracción más uno, es decir

$$U' = 1 + 17 = 18$$

De modo que la cota inferior para $f(x) = 0$, o sea la original, es

$$L = -18$$

Lo que resta es comparar las cotas obtenidas por uno y otro método y seleccionar las mejores.

MÉTODO DE LA RAÍZ	MÉTODO DE LAS FRACCIONES
$U = 5.123$	$U = 4.666$
$L = -18$	$L = -18$

Las mejores cotas son

$$U = 4.666$$

$$L = -18$$

que significa que las raíces reales de la ecuación $2x^5 + x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 34x - 8 = 0$ están entre (-18) y 4.666 .

$$-18 < \text{raíces racionales} < 4.666$$

CONSIDERACIONES PRÁCTICAS:

- 1) En los ejemplos anteriores, compárense las ecuaciones $f(x) = 0$ con los resultados obtenidos al calcular $f(-x) = 0$. En la siguiente tabla se muestran:

	EN EL PRIMER EJEMPLO	EN EL SEGUNDO EJEMPLO
$f(x)$	$x^4 - 14x^3 + 51x^2 - 14x - 80 = 0$	$2x^5 + x^4 - 11x^3 + 25x^2 - 34x - 8 = 0$
$f(-x)$	$x^4 + 14x^3 + 51x^2 + 14x - 80 = 0$	$2x^5 - x^4 - 11x^3 - 25x^2 - 34x + 8 = 0$

Se nota que los términos colocados en lugar non, leídos de izquierda a derecha, conservaron su signo, mientras que los situados en lugar de orden par lo cambiaron. Esa es una regla práctica para obtener $f(-x)$.

- 2) La ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces positivas si todos los coeficientes son positivos, lo que implica que todas sus raíces o son cero o son negativas, ya que si alguna fuera positiva, al sustituir en la ecuación se obtendría una suma de términos todos positivos y eso jamás daría cero. Por una razón similar, la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces negativas si los coeficientes son alternadamente positivos y negativos, lo que implica que todas sus raíces o son cero o son positivas, ya que al hacer $f(-x) = 0$, por lo dicho renglones arriba, solo se cambian de signo los términos colocados en 2º, 4º, 6º, etc., lugares que corresponden justamente a los negativos de $f(x) = 0$, volviéndose así todos positivos.

EJERCICIO 9.3

Encontrar las raíces racionales de las siguientes ecuaciones:

- 1) $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = 0$
- 2) $6x^3 + 19x^2 - 19x + 4 = 0$
- 3) $6x^3 + 17x^2 + 4x - 12 = 0$
- 4) $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 0$
- 5) $4x^3 + x^2 + 9x - 9 = 0$
- 6) $3x^3 + 8x^2 + 19x + 10 = 0$
- 7) $6x^3 - 5x^2 + 35x + 6 = 0$
- 8) $2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x - 3 = 0$
- 9) $6x^4 + 31x^3 + 19x^2 - 34x + 8 = 0$
- 10) $6x^4 + 47x^3 + 89x^2 + 8x - 60 = 0$
- 11) $16x^4 - 8x^3 + 33x^2 - 63x + 27 = 0$
- 12) $9x^4 + 30x^3 + 73x^2 + 68x + 20 = 0$

FACTORIZACIÓN

Pueden utilizarse los teoremas vistos al inicio de este tema y los métodos de resolución de ecuaciones para encontrar la factorización del polinomio $f(x)$, considerando que si $x = c$ es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, entonces $(x - c)$ es un factor de dicha ecuación.

Únicamente debe tenerse cuidado de que el producto de los primeros términos de cada factor dé exactamente el primer término del polinomio $f(x)$. En caso de que no sea así significa que hace falta agregarle el factor numérico que los iguale. Dicho factor numérico debe distribuirse entre todos aquellos que contengan fracciones para eliminarlas.

Esa diferencia se debe a que originalmente se tiene el polinomio $f(x)$ sin igualar a cero ni a nada, ya que no tiene por qué estarlo, es simplemente un polinomio, es decir, no es ecuación, y para encontrar sus factores se iguala arbitrariamente a cero para construir una ecuación que coincida con el polinomio y aplicarle las técnicas y teoremas vistos. El polinomio original $f(x)$ no se puede multiplicar por ninguna cantidad porque se altera, ya que no está igualado a nada, en cambio la ecuación $f(x) = 0$ sí se puede multiplicar aplicando la ley uniforme o ley de las igualdades.

Ejemplo 1: Factorizar $6x^3 - 29x^2 - 62x + 120$.

Solución: Nótese que el enunciado no hace referencia a ninguna ecuación, simplemente al polinomio $6x^3 - 29x^2 - 62x + 120$. No es una igualdad, simplemente es una expresión algebraica.

El procedimiento para factorizar es tratar a $f(x)$ como ecuación, es decir, igualándola a cero y aplicándole todos los conceptos antes vistos.

Así que considérese la ecuación $6x^3 - 29x^2 - 62x + 120 = 0$.

Las cotas son $U = 11.33$ y $L = -4.42$; se deja como ejercicio al alumno que las obtenga aplicando los métodos de la raíz y de las fracciones.

Las posibles raíces, considerando las cotas, son:

$$\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 3 ; \pm 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10$$

$$\pm \frac{1}{2} , \pm \frac{3}{2} , \pm \frac{5}{2} , + \frac{15}{2}$$

$$\pm \frac{1}{3} , \pm \frac{2}{3} , \pm \frac{4}{3} , \pm \frac{5}{3} , \pm \frac{8}{3} , \pm \frac{10}{3} , + \frac{20}{3}$$

$$\pm \frac{1}{6} , \pm \frac{5}{6}$$

Luego de ensayar con algunos valores se llega a

$$\begin{array}{r} 6 - 29 - 62 + 120 \quad | \quad 6 \\ + 36 + 42 - 120 \\ \hline 6 + 7 - 20 \quad 0 \end{array}$$

La primera raíz de la ecuación es $x_1 = 6$.

De la ecuación degradada $6x^2 + 7x - 20 = 0$, se obtiene que

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(6)(-20)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 480}}{12}$$

$$x = \frac{-7 \pm 23}{12}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = -\frac{5}{2}$$

Las raíces de la ecuación son

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = -\frac{5}{2}$$

Por el teorema de la raíz, los factores de la ecuación son

$$(x - 6) \left[x - \frac{4}{3} \right] \left[x + \frac{5}{2} \right] = 0$$

que es equivalente a $6x^3 - 29x^2 - 62x + 120 = 0$.

Sin embargo (no son iguales),

$$6x^3 - 29x^2 - 62x + 120 \neq (x - 6) \left[x - \frac{4}{3} \right] \left[x + \frac{5}{2} \right] = 0$$

Puede comprobarse fácilmente que no son iguales ya que si multiplican los primeros términos de los tres factores, se obtiene x^3 , pero no $6x^3$ como está en la ecuación equivalente.

Lo mismo puede hacerse con los términos independientes, en donde si se multiplican

$$(-6) \left[-\frac{4}{3} \right] \left[\frac{5}{2} \right]$$

no se obtiene $+120$ que es el término independiente de la otra expresión.

Debe tenerse mucho cuidado y entenderse que las dos ecuaciones anteriores, la factorizada y la no factorizada, son equivalentes porque al estar igualadas a cero se puede aplicar la ley uniforme o de las igualdades "*lo que se haga de un lado de una igualdad debe hacerse del otro lado*", de manera que lo que realmente se hizo fue dividir entre seis a la ecuación original factorizada.

Este es el detalle fundamental en el proceso de factorización por este método. El error que suele cometer el estudiante es afirmar que

$$6x^3 - 29x^2 - 62x + 120 = (x - 6) \left[x - \frac{4}{3} \right] \left[x + \frac{5}{2} \right]$$

cuando realmente no son iguales ambas expresiones por lo que se acaba de mencionar.

Para que sí sean iguales debe descubrirse qué factor le hace falta al producto de los primeros términos de la factorización para que dé el primer término de la no factorizada, y agregarlo. En este caso, lo que hace falta es multiplicar por seis. De manera que

$$6x^3 - 29x^2 - 62x + 120 = 6(x - 6) \left[x - \frac{4}{3} \right] \left[x + \frac{5}{2} \right]$$

sí es ya realmente igual, ya que al multiplicar $(x)(x)(x)$ por el seis agregado ahora sí da el $6x^3$ original del primer término.

Y también al multiplicar $(-6) \left[-\frac{4}{3} \right] \left[\frac{5}{2} \right]$ por el 6 agregado se obtiene $+120$.

Lo único que resta por hacer es distribuir ese seis agregado en los factores que tienen fracción para que desaparezcan. En este caso, ese seis agregado es igual a tres por dos. El tres es para el

segundo factor que tiene un denominador tres, mientras que el dos es para el tercer factor que tiene un denominador dos, de la siguiente forma:

$$6x^3 - 29x^2 - 62x + 120 = (x - 6)(3)\left[x - \frac{4}{3}\right](2)\left[x + \frac{5}{2}\right]$$

$$6x^3 - 29x^2 - 62x + 120 = (x - 6)(3x - 4)(2x + 5)$$

Esto último es la factorización correcta de la expresión polinomial original. Obsérvese que la multiplicación de los primeros términos $(x)(3x)(2x)$ sí da ahora $6x^3$, lo mismo que la de los términos independientes $(-6)(-4)(5)$ da 120. De hecho, puede comprobarse fácilmente haciendo toda la multiplicación.

FACTORES IRREDUCTIBLES

En este último tema de factorización es conveniente saber que algunos factores de segundo grado son reductibles y otros no. Reducible significa que se pueden reducir a dos o más por factorización, es decir, que son factorizables.

Los factores de segundo grado que son irreducibles (no reductibles) son aquellos que tratados como ecuación de segundo grado dan negativa la raíz cuadrada $\sqrt{b^2 - 4ac}$ de la correspondiente fórmula conocida $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Por ejemplo, $3x^2 - 2x + 23$ es irreducible, ya que tratado con la fórmula general de las ecuaciones de segundo grado, el radical da negativo. Se deja al alumno que lo practique y lo compruebe.

EJERCICIO 9.4

Factorizar los siguientes polinomios dentro del campo de los números reales. Si al llegar a la ecuación de segundo grado la raíz cuadrada resulta negativa, significa que no se puede factorizar dentro de los números reales y ese polinomio de segundo grado es ya un factor.

- 1) $9x^3 - 39x^2 - 29x - 5$
- 2) $3x^3 - 25x^2 + 64x - 48$
- 3) $8x^3 + 20x^2 + 14x + 3$
- 4) $6x^3 + 17x^2 + 4x - 12$
- 5) $8x^3 + 42x^2 + 63x + 27$
- 6) $4x^3 + x^2 + 9x - 9$
- 7) $3x^3 + 8x^2 + 19x + 10$
- 8) $16x^4 - 8x^3 + 33x^2 - 63x + 27$
- 9) $9x^4 - 6x^3 + 25x^2 + 52x + 20$
- 10) $6x^4 + 47x^3 + 89x^2 + 8x - 60$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com